第三节　积分基本公式

一、柯西积分公式

定理 (柯西积分公式)

如果函数$f(z)$在区域D内处处解析，C为D内的任何一条正向简单曲线，它的内部完全含于D，z_0为C内的任一点，那么

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

说明：(1) $f(z)$在D内处处解析，$\frac{f(z)}{z-z_0}$在D内有一个奇点$z=z_0$；

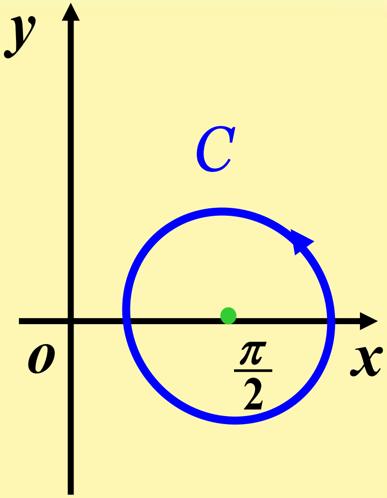
$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

(2) 公式左端$f(z_0)$表示函数$f(z)$在闭曲线C的内部z_0点的函数值;右端$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz$是函数$\frac{f(z)}{z-z_0}$在闭曲线$C$上的积分值,因此常将公式变成:

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\cdot f(z_0)$$ 的形式来用;

(3) 一个解析函数$f(z)$在区域D内的值$f(z_0)$,可以用它边界上的值通过积分$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$来表示

例 1 计算下列复积分 (1) $\oint\limits_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=1} \frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}} dz$



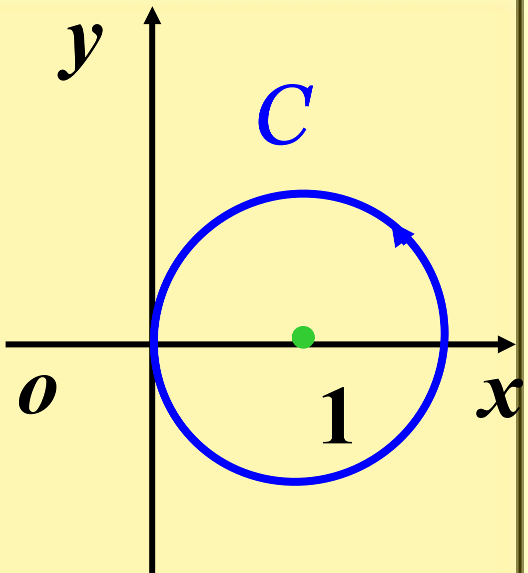
解：(1) $\because \sin z$ 在全平面上处处解析，

从而在由曲线 $C: \left|z-\frac{\pi}{2}\right| = 1$ 所围区域内也处处解析。

由柯西积分公式得

$$\oint\limits_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=1} \frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}} dz = 2\pi i \cdot \sin z \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 2\pi i$$

(2) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{z^2-1}dz$



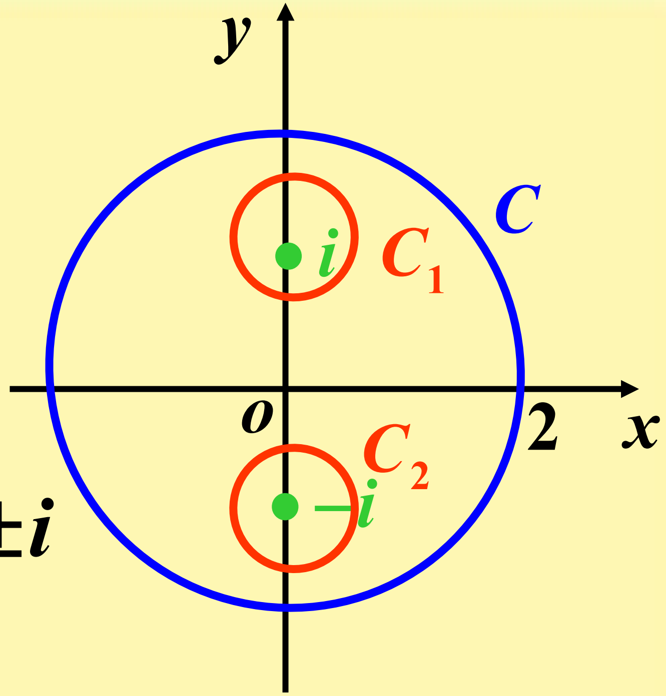
解 $\because \dfrac{\cos z}{z^2-1} = \dfrac{\frac{\cos z}{z+1}}{z-1}$

$\dfrac{\cos z}{z+1}$在曲线$C: |z-1|=1$所围的区域内处处解析,

由柯西积分公式得:

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{z^2-1}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{\cos z}{z+1}\right|_{z=1} = 2\pi i \cdot \frac{\cos 1}{2} = \pi i \cos 1$$

$$(3)\ \oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2+1}dz$$



解： $\dfrac{e^z}{z^2+1}$在曲线$C:|z|=2$

所围区域内有两个奇点：$z=\pm i$

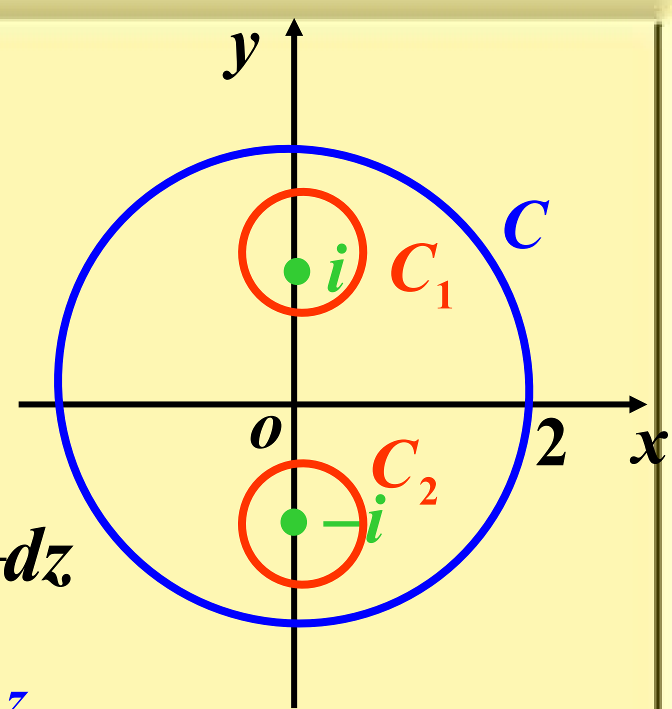
作两条封闭曲线C_1和C_2,

C_1和C_2互不相交,并且C_1仅含$z=i$和C_2仅含$z=-i$

根据复合闭路定理:

$$\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2+1}dz=\oint_{C_1}\frac{e^z}{z^2+1}dz+\oint_{C_2}\frac{e^z}{z^2+1}dz$$

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1}dz$



根据复合闭路定理:

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1}dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z^2+1}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z^2+1}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\dfrac{e^z}{z+i}}{z-i}dz + \oint_{C_2} \frac{\dfrac{e^z}{z-i}}{z+i}dz$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{e^z}{z+i}\bigg|_{z=i} + 2\pi i \cdot \frac{e^z}{z-i}\bigg|_{z=-i} \quad = (2\pi \sin 1)i$$

二、解析函数的高阶导数

一个实变函数在某一区间上可导，它的导数在这区域上是否连续也不一定，更不要说它有高阶导数存在了。

一个解析函数不仅有一阶导数，而且有各阶导数，它的值也可以用函数在边界上的值通过积分来表示。这一点与实变函数完全不同。

关于解析函数的高阶导数我们有下面的定理。

定理 (解析函数的高阶导数公式)

解析函数$f(z)$的导数仍为解析函数，它的n阶导数为：

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\ (n=1,2,\cdots)$$

其中C为在函数$f(z)$的解析区域D内围绕z_0的任何一条正向简单曲线,而且它的内部完全含于D。

注:

(1) 由函数的解析性，可以推出该函数任意阶导函数的存在性，从而得出这些导函数的解析性。这是解析函数所特有的性质。

解析函数$f(z)$的导数仍为解析函数,它的n阶导数为:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\ (n=1,2,\cdots)$$

(2) 利用所给公式可以计算:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)=2\pi i\cdot\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

其中$f^{(n)}(z_0)$是函数$f(z)$在z_0处的n阶导数值

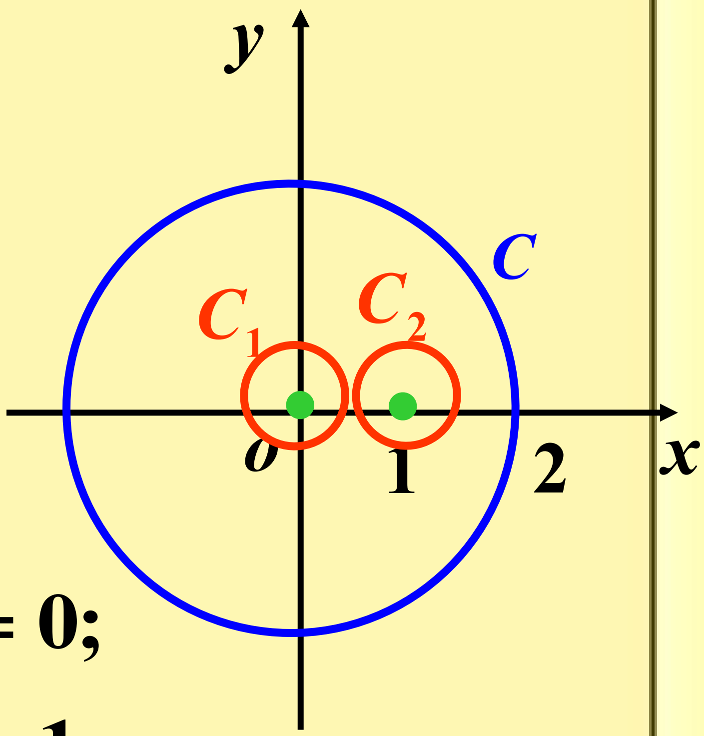
因此高阶导数公式的作用不在于通过积分来求导,而在于通过求导来求积分。

例 3 求积分$\oint_C \dfrac{e^z}{z(1-z)^3}dz$的值,其中$C:|z|=2$(正向)

解:$\because$函数e^z在全平面上解析,

函数$\dfrac{1}{z(1-z)^3}$在C内有两

个奇点:$z=0, z=1$。



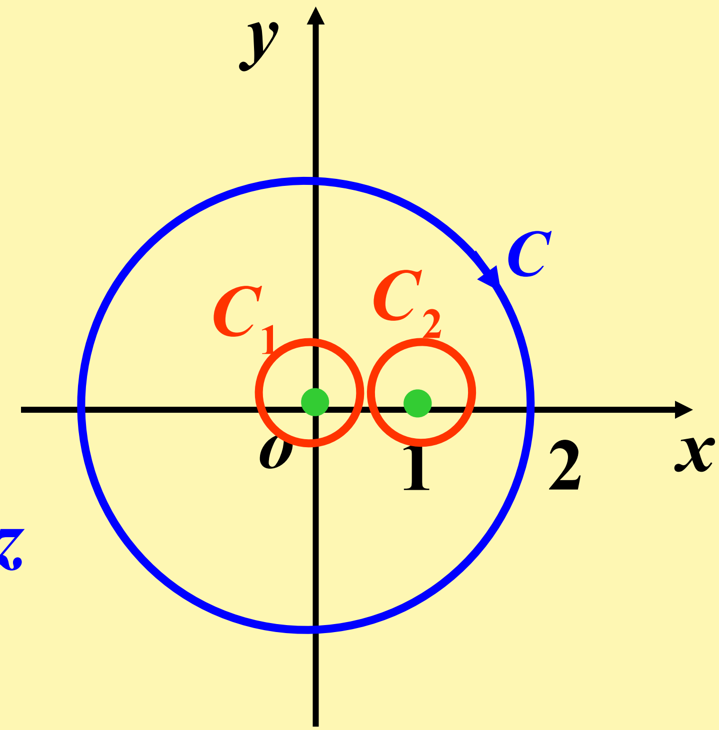
作封闭正向曲线C_1,仅含$z=0$;

作封闭正向曲线C_2,仅含$z=1$.

C_1与C_2互不包含,互不相交,这样以C, C_1, C_2为边界构成了一个复连 通区域。

在以C,C_1,C_2为边界的复连通区域上

利用复合闭路定理

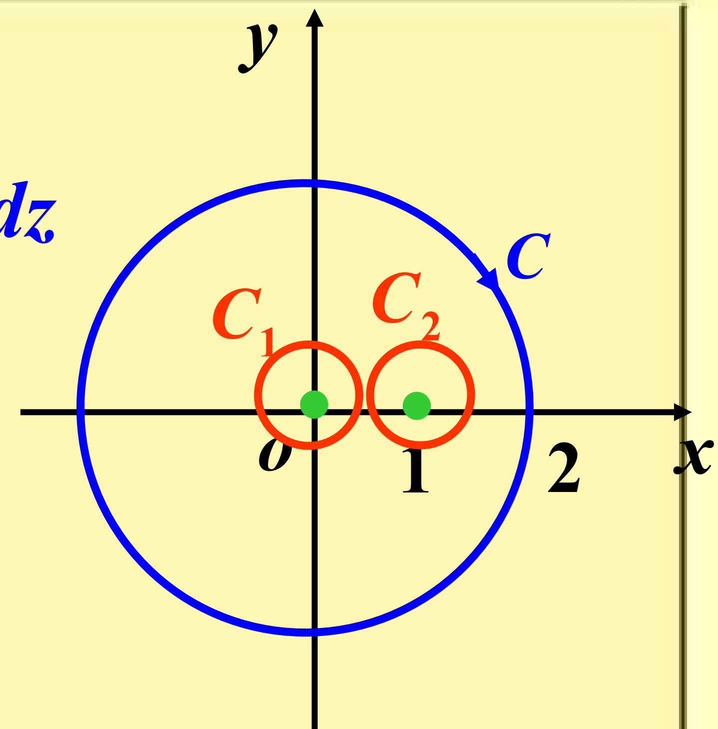


$$\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z}dz - \oint_{C_2} \frac{\frac{e^z}{z}}{(z-1)^3}dz$$

$$I = \oint_{C_1} \frac{\dfrac{e^z}{(1-z)^3}}{z} dz + \oint_{C_2} \frac{\dfrac{e^z}{z}}{(1-z)^3} dz$$



$$= \oint_{C_1} \frac{\dfrac{e^z}{(1-z)^3}}{z} dz - \oint_{C_2} \frac{\dfrac{e^z}{z}}{(z-1)^3} dz$$

分别利用柯西积分公式,解析函数的高阶导数公式:

$$I = 2\pi i \cdot \frac{e^z}{(1-z)^3}\bigg|_{z=0} - 2\pi i \cdot \frac{1}{(3-1)!}\left(\frac{e^z}{z}\right)''\bigg|_{z=1}$$

$$= 2\pi i - e\pi i = (2-e)\pi i$$

复积分求法的小结：

基本定理、复合闭路定理、柯西公式、求导公式、牛顿-莱布尼兹定理

首先看积分曲线C的开与闭，其次看$f(z)$的解析性。

1、C为开路径
- (i)若$f(z)$解析，则用牛顿-莱布尼兹公式
  $$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - f(z_1)$$
- (ii)其它，特别C为直线、折线、圆弧时用参数法
  $$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt.$$

$$
2、C\text{为闭路径}\begin{cases}(i)\ f(z)\text{在}C\text{所围成的单连通域内解析, 由基本定理} \\ \oint_C f(z)dz=0 \\ (ii)\ f(z)\text{在}C\text{所围成的区域内有奇点，则挖洞后用} \\ \text{复合闭路定理和柯西积分公式(一次因子)} \\ (iii)\ f(z)\text{在}C\text{所围成的区域内有奇点，则挖洞后用} \\ \text{复合闭路定理和高阶求导公式(二次及二次以上因子)}\end{cases}
$$

事实上公式

$$
\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad n=0,1,2,\cdots
$$

包含其他几个公式

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0) \qquad n=0,1,2,\cdots$$

(1) 令 $n=0$ $\displaystyle \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{2\pi i}{0!}f^{(0)}(z_0) = 2\pi i \cdot f(z_0)$

(2) 令 $f(z)=1$ $$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n>0 \end{cases}$$

若 $n<0$ 由柯西—古萨基本定理

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \oint_C (z-z_0)^{-n-1}dz = 0$$